Pe marginea materialelor publicate în Gazeta matematică

Constantin P. Niculescu, Universitatea din Craiova

Scopul acestei rubrici este acela de a comenta diferitele rezultate apărute în paginile Gazetei matematice, cu scopul de a evidenția noi consecințe şi noi conexiuni, de a prezenta demonstrații mult mai scurte, de a discuta aspectele de prioritate etc. Cititorii dornici de a contribui la această rubrică mă pot contacta fie pe adresa Universității din Craiova, fie prin email, la adresa tempus@oltenia.ro

Generalizarea inegalității Erdös-Mordell

Un articol recent al domnului Marian Dincă [1] demonstrează următoarea generalizare a inegalității Erdös-Mordell (de la cazul triunghiurilor, la cazul poligoanelor convexe): *Fie* $A_1A_2...A_n$ *un poligon convex şi* M *un punct în interiorul său. Notăm cu* R_k *distanța de la* M *la vârful* A_k *şi cu* r_k *distanța de la* M *la latura* A_kA_{k+1} (*unde* $k=1,\ldots,n$ şi $A_{n+1}=A_1$). *Atunci*

$$\text{(EM)}\qquad \sum_{k=1}^{n} r_k \le \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} R_k .$$

Acest rezultat *nu* este nou, ci aparține lui H.-C. Lenhard [2], care îl deduce demonstrând următorul fapt (conjecturat de L. Fejes Toth; cf. [1], pag. 139): *Fie* $x_1,\ldots x_n$ *şi* $\delta_1,\ldots,\delta_n$ *două seturi de numere pozitive astfel că* $\delta_1+\ldots+\delta_n=\pi$. *Notăm* $x_{n+1}=x_1$. *Atunci*

$$\text{(T)}\qquad \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}\cos\delta_k \le \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

Modul cum (EM) rezultă din (T) este recent amintit în lucrarea [3]: Notăm $\angle A_kMA_{k+1}=2\delta_k$. Bisectorea acestui unghi întâlneşte latura A_kA_{k+1} în W_k şi notăm cu w_k lungimea ei. Atunci

$$w_k=\frac{2R_kR_{k+1}}{R_k+R_{k+1}}\cdot\cos\delta_k$$

unde $R_k=MA_k$ şi $R_{n+1}=R_1$. Deoarece $2\sqrt{R_kR_{k+1}}\le R_k+R_{k+1}$ şi $\cos\delta_k\ge 0$, din (T) rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{R_kR_{k+1}}\cos\delta_k \le \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n} R_k .$$

Or, distanța r_k a lui M la latura A_kA_{k+1} este mai mică decât w_k, ceea ce asigură valabilitatea inegalității (EM).

Apărut în *Gazeta matematică*, **CV** (2000), nr. 11, pp. 434-435

Bibliografie

[1] O. Bottema, R. Z. Djordjevic, R. R. Janic, D. S. Mitrinovic and P. M. Vasic, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969, The Netherlands.

[2] Marian Dincă, *Generalizarea inegalității Erdös-Mordell*, Gazeta matematică, anul **CIII** (1998), nr. 7-8, pp. 269-273.

[3] Faruk F. Abi-Khuzam, *A trigonometric inequality and its geometric applications,* Math. Inequal. Appl., 3 (2000), 437-442.

[4] H.-C. Lenhard, *Verallgemeinerung und Verscharfung der Erdös-Mordellschen Ungleichung für Polygone,* Arch. Math., Vol. **XII** (1961), pp. 311-314.

Prof. Constantin P. Niculescu, Universitatea din Craiova, Facultatea de matematică-informatică, Str. A. I. Cuza 13, Craiova 1100